

Gabriel Popa, Adrian Zanoschi,  
Gheorghe Iurea, Dorel Luchian

# MATEMATICĂ

---

## EVALUAREA NAȚIONALĂ 2022

---

**Clasa a VIII-a**

- Memorator cu cele mai importante noțiuni și definiții din programă
- Teme recapitulative conținute de programa de examen
- 70 de variante de subiecte cu soluții de rezolvare



*Cuvânt-înainte* / **5**

MEMORATOR DE MATEMATICĂ / **7**

TEME RECAPITULATIVE / **20**

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ / **58**

SOLUȚII

TEME RECAPITULATIVE / **230**

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ / **244**

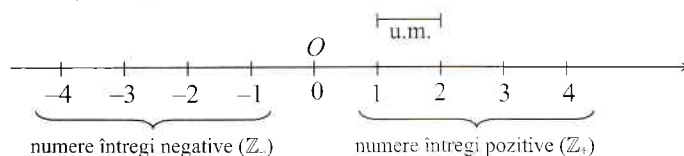
## ALGEBRĂ

### MULȚIMI NUMERICE

$\mathbb{N}$  – mulțimea numerelor naturale;  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

$\mathbb{Z}$  – mulțimea numerelor întregi;  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$ ;  $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$ .



$\mathbb{Q}$  – mulțimea numerelor raționale;  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ și } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ .  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ;  $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ ;  $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$ .

$\mathbb{R}$  – mulțimea numerelor reale,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  = mulțimea numerelor iraționale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

### OPERAȚII CU MULȚIMI

Reuniunea:  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ .

Intersecția:  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$ .

Diferența:  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ .

### OPERAȚII CU NUMERE

Factor comun:  $f \cdot a \pm f \cdot b = f \cdot (a \pm b)$ ,  $\forall a, b, f \in \mathbb{R}$ .

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (citim: „n factorial”); } 0! = 1.$$

Opusul numărului real  $r$  este numărul real  $-r$ .

Inversul numărului real nenul  $r$  este numărul real  $r^{-1} = \frac{1}{r}$ .

### TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

În  $\mathbb{N}$ :  $\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0, \exists! c, r \in \mathbb{N}$  astfel încât  $a = b \cdot c + r, 0 \leq r < b$ .

În  $\mathbb{Z}$ :  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \exists! c \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$  astfel încât  $a = b \cdot c + r, 0 \leq r < |b|$ .

### DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{N}$

Pentru  $d, m \in \mathbb{N}$  spunem că  $d \mid m$  dacă există  $x \in \mathbb{N}$  astfel încât  $m = d \cdot x$ .

#### Proprietăți:

$$P_1: 1 \mid n; n \mid 0, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$P_2: \text{Dacă } a, d \in \mathbb{N} \text{ și } d \mid a, \text{ atunci } d \mid a \cdot n, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$P_3: \text{Dacă } a, b, d \in \mathbb{N}, d \mid a \text{ și } d \mid b, \text{ atunci } d \mid (a \pm b).$$

#### Criterii de divizibilitate:

$$\text{I. Folosind ultima cifră a numărului: } 2 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}; 5 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 5\}; 10 \mid n \Leftrightarrow u(n) = 0.$$

$$\text{II. Folosind suma cifrelor numărului: } 3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid S(n); 9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid S(n).$$

$$\text{III. Folosind ultimele două cifre ale numărului: } 4 \mid \overline{a \dots xy} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{xy}; 25 \mid \overline{a \dots xy} \Leftrightarrow 25 \mid \overline{xy}.$$

**Număr prim:** număr natural care are exact doi divizori.

**C.m.m.d.c.:**  $d = (a, b)$  dacă: i)  $d \mid a$  și  $d \mid b$ ;  
ii) dacă  $d' \mid a$  și  $d' \mid b$ , atunci  $d' \mid d$ .

Pentru a calcula  $(a, b)$  procedăm astfel:

- descompunem numerele  $a$  și  $b$  în factori primi;
- luăm factorii primi comuni, o singură dată, la exponentul cel mai mic și îi înmulțim.

Numerele  $a$  și  $b$  sunt relativ prime (prime între ele) dacă  $(a, b) = 1$ .

Dacă  $d = (a, b)$ , atunci  $a = dx$ ,  $b = dy$ , cu  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $(x, y) = 1$ .

Dacă  $n \mid a$  și  $n \mid b$ , atunci  $n \mid (a, b)$ .

Dacă  $a \mid b \cdot c$  și  $(a, b) = 1$ , atunci  $a \mid c$ .

**C.m.m.m.c.:**  $m = [a, b]$  dacă: i)  $a \mid m$  și  $b \mid m$ ;  
ii) dacă  $a \mid m'$  și  $b \mid m'$ , atunci  $m \mid m'$ .

Pentru a calcula  $[a, b]$  procedăm astfel:

- descompunem numerele  $a$  și  $b$  în factori primi;
- luăm factorii primi comuni și necomuni, o singură dată, la exponentul cel mai mare și îi înmulțim.

Dacă  $a \mid n$  și  $b \mid n$ , atunci  $[a, b] \mid n$ .

Oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{N}$ , are loc egalitatea  $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$ .

## PUTERI

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{de } n \text{ ori}}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}.$$

$$a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^*; a^1 = a, \forall a \in \mathbb{R}; 1^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}; 0^0 \text{ nu are sens.}$$

## Operații cu puteri

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall a \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. a^m : a^n = a^{m-n}, \forall a \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}, \forall a \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. (a : b)^n = a^n : b^n, a, b \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este număr par;} \\ -1, & \text{dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$$

## fracții ordinare, fracții zecimale

Fracție ireductibilă:  $\frac{a}{b}$ , cu  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$ ,  $(a, b) = 1$ .

Fracții echivalente:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  dacă  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Dacă  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^*$ , atunci  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \mid a$ .

**Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare:**

| Tipul fracției zecimale | Mod de transformare                                                                                                                                                                                               | Exemplu                                      |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| zecimală finită         | $\overline{a, b_1 b_2 \dots b_k} = a \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_k}}{10^k}$                                                                                                                                   | $2,79 = 2 \frac{79}{10^2} = \frac{279}{100}$ |
| periodică simplă        | $\overline{a, (b_1 b_2 \dots b_k)} = a \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ ori}}}$                                                                                              | $13,(24) = 13 \frac{24}{99}$                 |
| periodică mixtă         | $\overline{a, b_1 b_2 \dots b_k (c_1 c_2 \dots c_p)} = a \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_k c_p} - \overline{b_1 b_2 \dots b_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}} \underbrace{00 \dots 0}_{k \text{ ori}}}$ | $3,61(754) = 3 \frac{61754 - 61}{99900}$     |

$$m_a = \frac{x_1 + x_2}{2}; m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}, \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}.$$

Dacă  $p_1, p_2, \dots, p_k$  sunt respectiv ponderile numerelor  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , atunci:

$$m_p = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k} \quad (\text{media aritmetică ponderată}).$$

## MODULUL UNUI NUMĂR REAL

$$|x| - \text{modulul (sau valoarea absolută) a unui număr real; } |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

**Proprietăți ale modulului:**

$$P_1: |x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$P_2: |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$P_3: \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*;$$

$$P_4: |x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

## PARTEA ÎNTREAGĂ A UNUI NUMĂR REAL: $[x]$

$$[x] \leq x < [x] + 1; \quad [x] \in \mathbb{Z}.$$

## PARTEA FRAȚIONARĂ A UNUI NUMĂR REAL: $\{x\}$

$$\{x\} = x - [x]; \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

## RĂDĂCINA PĂTRATĂ (RADICALUL)

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a, \quad \text{unde } a, x \in \mathbb{R}, a, x \geq 0.$$

## REGULI DE CALCUL CU RADICALI

$$1. \text{ Dacă } a \geq 0, b \geq 0, \text{ atunci } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}.$$

$$2. \text{ Dacă } a \geq 0, b > 0, \text{ atunci } \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$3. \sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}, \quad a \geq 0, b \geq 0.$$

$$4. \sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}; \quad \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}_+; \quad \sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}, \quad a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

## RAȚIONALIZAREA NUMITORULUI

$$1. \frac{\sqrt{b}c}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{a \cdot b}, \quad b > 0, a \neq 0.$$

$$2. \frac{\sqrt{a-b}c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}, \quad \frac{\sqrt{a+b}c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}, \quad a > 0, b > 0, a \neq b.$$

$$3. \frac{n}{a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}} = \frac{n(a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d})}{a^2 \cdot b - c^2 \cdot d}, \quad b > 0, d > 0, a \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q}^* \text{ și } a^2 b \neq c^2 d.$$

## FORMULA RADICALILOR COMPUȘI

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \quad \text{unde } c = \sqrt{a^2 - b}$$

$$\begin{aligned}(a; b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}; (a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}; [a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}; [a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}. \\ [a; +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}; (a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}; (-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}; (-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}. \\ \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} &= [-a; a]. \quad \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty).\end{aligned}$$

### FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad 2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad 3. (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

### MEDIA GEOMETRICĂ (PROPORȚIONALĂ)

$$m_g = \sqrt{a \cdot b}, \quad a \geq 0, b \geq 0;$$

$$a \leq m_g \leq m_a \leq b, \text{ pentru } 0 \leq a \leq b \text{ (inegalitatea mediilor).}$$

### PRODUSUL CARTEZIAN

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}.$$

Dacă alegem în plan un sistem de coordonate  $xOy$ , putem identifica elementele produsului cartezian  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  cu punctele planului. Oricărei perechi ordonate de numere reale  $(x_A, y_A)$  îi corespunde un unic punct  $A(x_A, y_A)$ ;  $x_A$  se numește abscisa punctului  $A$ , iar  $y_A$  se numește ordonata punctului  $A$ .

Distanța dintre două puncte  $A(x_A, y_A)$  și  $B(x_B, y_B)$  se calculează după formula:  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

$$\text{Coordonatele mijlocului segmentului } AB \text{ sunt: } x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

### FUNCȚII

Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi nevide. Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca *fiecărui* element din mulțimea  $A$  să-i corespundă *un singur* element din mulțimea  $B$ , atunci spunem că am definit o funcție de la  $A$  la  $B$ .

$f: A \rightarrow B$ ;  $A$  – domeniul de definiție;  $B$  – codomeniul.

Graficul unei funcții:  $G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A, y = f(x)\}$ .

$M(x, y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y$ , cu  $x \in A, y \in B$ .

Funcțiile  $f: A \rightarrow B$  și  $g: C \rightarrow D$  sunt egale dacă  $A = C, B = D$  și  $f(x) = g(x), \forall x \in A$ .

### FUNCȚIA DE GRADUL I

Este o funcție  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = ax + b$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

Graficul unei asemenea funcții este o dreaptă oblică.

$$G_f \cap O_y = \{A(0; b)\}$$

$$G_f \cap O_x = \left\{ B\left(-\frac{b}{a}; 0\right) \right\}$$

Punctele de intersecție a graficului cu axele de coordonate.

Dacă  $a = 0$ , atunci  $f(x) = b$  (funcția este constantă); graficul este o dreaptă orizontală.

### ECUAȚIA DE GRADUL AL II-LEA

Forma generală:  $ax^2 + bx + c = 0$ , unde  $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$ . Discriminantul ecuației:  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

$$\text{Dacă } \Delta > 0, \text{ ecuația are două soluții reale distincte: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\text{Dacă } \Delta = 0, \text{ cele două soluții sunt egale: } x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Dacă  $\Delta < 0$ , ecuația nu are soluții reale.

Pentru  $\Delta \geq 0$ , expresia  $ax^2 + bx + c$  se descompune în factori astfel:  $a(x - x_1)(x - x_2)$ .

# UNITĂȚI DE MĂSURĂ

| Unitatea de exprimare<br>Tipul măsurătorii | Submultiplii                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Unitatea principală | Multiplii                                            |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------------------------|
| Lungime                                    | mm $\xrightarrow{:10}$ cm $\xrightarrow{:10}$ dm $\xrightarrow{:10}$ m $\xrightarrow{:10}$ dam $\xrightarrow{:10}$ hm $\xrightarrow{:10}$ km<br>$\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$                                                                                                                    | m                   | dam, hm, km                                          |
| Suprafață                                  | mm <sup>2</sup> $\xrightarrow{:10^2}$ cm <sup>2</sup> $\xrightarrow{:10^2}$ dm <sup>2</sup> $\xrightarrow{:10^2}$ m <sup>2</sup> $\xrightarrow{:10^2}$ dam <sup>2</sup> $\xrightarrow{:10^2}$ hm <sup>2</sup> $\xrightarrow{:10^2}$ km <sup>2</sup><br>$\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$ | m <sup>2</sup>      | dam <sup>2</sup> , hm <sup>2</sup> , km <sup>2</sup> |
| Volum                                      | mm <sup>3</sup> $\xrightarrow{:10^3}$ cm <sup>3</sup> $\xrightarrow{:10^3}$ dm <sup>3</sup> $\xrightarrow{:10^3}$ m <sup>3</sup> $\xrightarrow{:10^3}$ dam <sup>3</sup> $\xrightarrow{:10^3}$ hm <sup>3</sup> $\xrightarrow{:10^3}$ km <sup>3</sup><br>$\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$ | m <sup>3</sup>      | dam <sup>3</sup> , hm <sup>3</sup> , km <sup>3</sup> |

Pentru suprafețe:

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ ari} = 10\,000 \text{ m}^2; \quad 1 \text{ ar} = 100 \text{ m}^2.$$

Pentru capacitate, unitatea principală este litrul ( $\ell$ ).

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \ell; \quad 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}; \quad 1 \text{ m}^3 = 1000 \ell.$$

Unitatea principală pentru masă este kilogramul (kg).

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}; \quad 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}; \quad 1 \text{ q} = 100 \text{ kg}.$$

Unitatea principală pentru măsurarea timpului este secunda (s).

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}; \quad 1 \text{ h} = 60 \text{ min}; \quad 1 \text{ zi} = 24 \text{ h}.$$

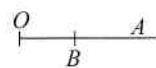
## UNGHIUL

Unghi = reuniunea a două semidrepte închise cu aceeași origine.

Unghiurile se măsoară în grade, minute și secunde:  $1^\circ = 60'$ ;  $1' = 60''$ .

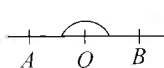
### Clasificarea unghiurilor:

Unghi nul



$$\angle AOB = 0^\circ$$

Unghi alungit



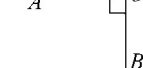
$$\angle AOB = 180^\circ$$

Unghi ascuțit



$$\angle AOB < 90^\circ$$

Unghi drept



$$\angle AOB = 90^\circ$$

Unghi obtuz



$$\angle AOB > 90^\circ$$

Unghiuri congruente = unghiuri care au aceeași măsură.

Bisectoarea unui unghi = semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul acestuia, care îl împarte în două unghiuri congruente.

Unghiuri adiacente: au același vârf, o latură comună și nu au puncte interioare comune.

Unghiuri complementare: două unghiuri care au suma măsurilor de  $90^\circ$ .

Unghiuri suplementare: două unghiuri care au suma măsurilor de  $180^\circ$ .

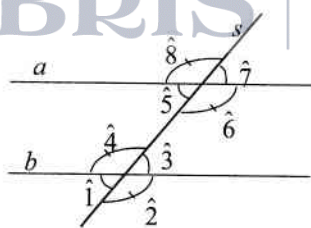
Unghiuri opuse la vârf: două unghiuri cu vârful comun și laturile în prelungire.

Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.

Drepte paralele: două drepte coplanare, fără puncte comune.

Drepte perpendiculare: două drepte concurente care formează un unghi drept.

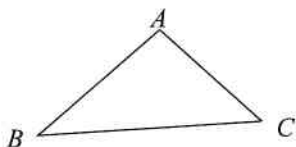
## Unghiuri congruente formate de două drepte paralele cu o secantă:



$$\begin{array}{l} \hat{3} \equiv \hat{5} \\ \hat{4} \equiv \hat{6} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{alterne interne} \\ \text{alterne externe} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \hat{1} \equiv \hat{5} \\ \hat{4} \equiv \hat{8} \\ \hat{2} \equiv \hat{6} \\ \hat{3} \equiv \hat{7} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{corespondente} \end{array} \right.$$

## TRIUNGHIUL



**Notăție:**  $\triangle ABC$

**Elemente:**

- vârfuri:  $A, B, C$
- laturi:  $AB, BC, AC$
- unghiuri:  $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC, \sphericalangle BCA$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$$

**Inegalitatea triunghiului:**

$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$

**Clasificare:**

I. După unghiuri

| Ascutitunghic | Dreptunghic | Obtuzunghic |
|---------------|-------------|-------------|
|               |             |             |

II. După laturi

| Oarecare | Isoscel | Echilateral |
|----------|---------|-------------|
|          |         |             |

**Triunghiuri congruente:** au laturile omoloage congruente și unghiurile omoloage congruente.

**Cazuri de congruență:**

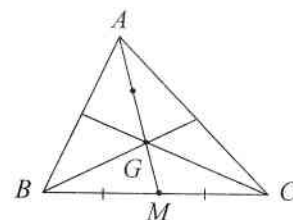
| Triunghiuri oarecare | Triunghiuri dreptunghice |
|----------------------|--------------------------|
| 1. L.U.L.            | 1. C.C.                  |
| 2. U.L.U.            | 2. C.U.                  |
| 3. L.L.L.            | 3. I.U.                  |
|                      | 4. I.C.                  |

## LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

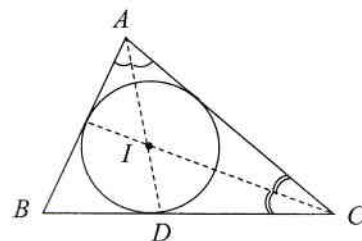
**Mediana:** segmentul care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

Centrul de greutate ( $G$ ) = punctul de intersecție a medianelor.

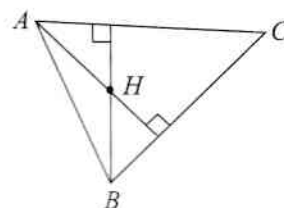
$$AG = \frac{2}{3} AM; GM = \frac{1}{3} AM.$$



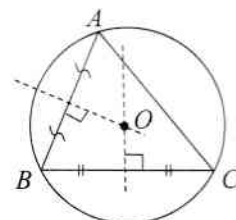
**Bisectoarea:** semidreapta cu originea în vârful unghiului, interioară unghiului, ce formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente.  
 Centrul cercului înscris ( $I$ ) = punctul de intersecție a bisectoarelor.  
 $d(I, AB) = d(I, AC) = d(I, BC) = r$ .



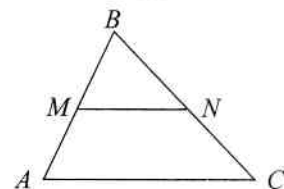
**Înălțimea:** segmentul ce trece printr-un vârf al triunghiului și este perpendicular pe latura opusă.  
 Ortocentrul triunghiului ( $H$ ) = punctul de intersecție a înălțimilor.



**Mediatoarea:** dreapta perpendiculară pe o latură a triunghiului, ce trece prin mijlocul acesteia.  
 Centrul cercului circumscris ( $O$ ) = punctul de intersecție a mediatoarelor.  
 $OA = OB = OC = R$ .



**Linia mijlocie în triunghi:** segment care unește mijloacele a două laturi ale triunghiului.  
 Linia mijlocie este paralelă cu a treia latură și egală cu jumătate din lungimea acesteia.



## TRIUNGHIURI SPECIALE

### Triunghiul isoscel:

- are două laturi congruente (a treia se numește bază);
- unghiurile alăturate bazei sunt congruente;
- bisectoarea unghiului din vârf este mediană, înălțime și mediatoare corespunzătoare bazei.

### Triunghiul echilateral:

- are toate laturile congruente;
- are toate unghiurile congruente (fiecare având măsura de  $60^\circ$ );
- bisectoarea oricărui unghi este mediană, înălțime și mediatoare corespunzătoare laturii opuse.

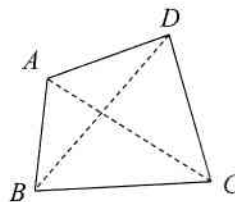
### Triunghiul dreptunghic:

- are un unghi drept, iar celelalte două sunt ascuțite și complementare;
- mediana corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei;
- cateta opusă unui unghi de  $30^\circ$  este egală cu jumătate din ipotenuză (teorema  $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$ ).

## PATRULATERE

### Elemente:

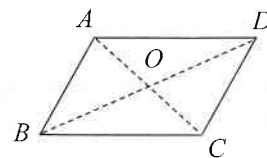
- vârfuri:  $A, B, C, D$ ;
  - laturi:  $AB, BC, CD, AD$ ;
  - unghiuri:  $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$ ;
  - diagonale:  $AC, BD$ .
- $$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$$



patrulater convex

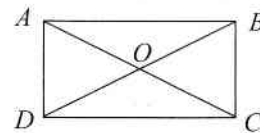
**Paralelogramul** = patrulaterul cu laturile opuse paralele.

- laturile opuse sunt congruente;
- unghiurile opuse sunt congruente;
- unghiurile alăturate sunt suplementare;
- diagonalele se înjumătățesc.



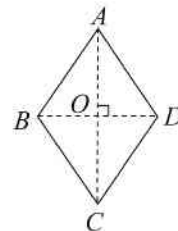
**Dreptunghiul** = paralelogramul cu un unghi drept.

- are toate proprietățile paralelogramului;
- are toate unghiurile drepte;
- diagonalele sunt congruente.



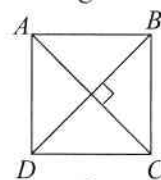
**Rombul** = paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.

- are toate proprietățile paralelogramului;
- toate laturile sunt congruente;
- diagonalele sunt perpendiculare și sunt bisectoarele unghiurilor rombului.



**Pătratul** = rombul cu un unghi drept.

- are toate proprietățile rombului;
- are toate proprietățile dreptunghiului.



**Trapezul** = patrulaterul cu două laturi paralele și celelalte două laturi neparalele.

Dacă  $CC' \perp AB$ , atunci  $CC'$  = înălțimea trapezului.

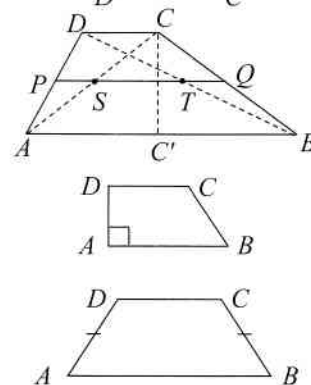
Linia mijlocie ( $PQ$ ) = segmentul ce unește mijloacele laturilor neparalele.

$$PQ = \frac{(AB + CD)}{2} \text{ și } ST = \frac{|AB - CD|}{2}, \text{ unde } \{T\} = PQ \cap BD, \{S\} = PQ \cap AC.$$

**Trapez dreptunghic** = trapezul având un unghi drept.

**Trapez isoscel** = trapezul având laturile neparalele congruente.

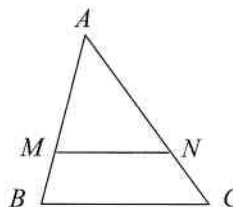
- unghiurile alăturate bazelor sunt congruente;
- unghiurile opuse sunt suplementare;
- diagonalele sunt congruente.



## RELAȚII METRICE

**Teorema lui Thales:**

$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



**Triunghiuri asemenea:**

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \text{ dacă } \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \text{ și } \angle A \equiv \angle M, \angle B \equiv \angle N, \angle C \equiv \angle P.$$

- Dacă  $\triangle ABC$  este dreptunghic în  $A$  și  $D = \text{pr}_{BC} A$ , atunci:

**Teorema catetei:**

$$AC^2 = BC \cdot CD; AB^2 = BC \cdot BD.$$

**Teorema înălțimii:**

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

